14/1/16

(✱) $F(x, y, z_x, z_y, z) = 0$ Γενική μορφή της εξίσωσης
$F: \underline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Λύση της (✱) είναι μια συνάρτηση $z: \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ με $z \in C^1(\underline{\Omega})$

<u>Άσκηση 2</u>
σελίδα 406

$\underline{\Omega} = \mathbb{R}^2 - \{(x,0),\ x \geq 0\}$

$$z(x,y) = \begin{cases} x^2, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \underline{\Omega} - \{(x,y): x>0,\ y>0\} \end{cases}$$

είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης $z_y = 0$, $(x,y) \in \underline{\Omega}$

Παρατήρηση: Υπάρχει μερικές συνεχείς παράγωγοι στο $\underline{\Omega}$, σταθερές ως προς y, στο $\underline{\Omega}$ με ορισμό

.

Άσκηση 7
σελίδα 417

$$z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

η z ασυνεχής στο (0,0)
αλλά είναι τέτοια ώστε $x z_x(x,y)+y z_y(x,y)=0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$
$\exists$ μερ. παρ. σε όλο το $\mathbb{R}^2$ αλλά η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

Γραμμική $A(x,y)z_x+B(x,y)z_y+C(x,y)z=\Phi(x,y)$
A, B, C, Φ συνεχείς στο $\underline{\Omega}$ και τουλάχιστον μια από τις A, B δεν μηδενίζονται πουθενά στο $\underline{\Omega}$.

$\alpha(x,y)z_x+c(x,y)z=\varphi(x,y)$ η ελλειπής μορφή
η άγνωστη συνάρτηση βρίσκεται μόνο στη μερική παράγωγο ως προς x.

$$z_x+\frac{c(x,y)}{a(x,y)}z=\frac{\varphi(x,y)}{a(x,y)}$$ a σίγουρα μη-μηδενική

Έστω x_0 εν $\underline{\Omega}$

$$z(x,y)=e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{c(s,y)}{\alpha(s,y)}ds}\left[z(x_0,y)+\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(s,y)}{\alpha(s,y)}e^{\int_{x_0}^{s}\frac{c(t,y)}{a(t,y)}dt}ds\right]$$

f(y) μια σταθερά ως προς x αν κάνω αόριστη ολοκλήρωση και πρέπει να είναι και παρ/μη αφού $z\in C'(\underline{\Omega})$

Άσκηση 1
σελίδα 415

$z_x+2xyz_y=xy^2\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$z(x,y)=e^{-\int_0^x 2sy\,ds}\Big[\underset{z(0,y)}{\overset{\shortparallel}{f(y)}}+\int_0^x sy^2e^{\int_0^s 2ty\,dt}ds\Big]$$

$f \in C(\mathbb{R})$

$$z(x,y) = e^{-yx^2}\left[f(y) + \int_0^x s y^2 e^{s^2 y}\, ds\right] = \frac{y}{2} - e^{-x^2 y}\left[1 - f(y)\right]$$

$a z_x + b z_y + c z = \varphi$ πλήρης μορφή $a(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \Omega$

$\xi = x$

$\eta = \omega(x,y)$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = z_\xi \cdot 1 + z_\eta \omega_x$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \cancel{z_\xi \cdot 0} + z_\eta \omega_y$$

και αντικαθιστούμε:

$a[z_\xi + z_\eta \omega_x] + b z_\eta \omega_y + cz = \varphi$

$a z_\xi + \underline{(a\omega_x + b\omega_y)} z_\eta + cz = \varphi$

Θέλω να είναι μηδέν με την κατάλληλη $\omega(x,y)$

$\omega(x,y) = d$ σταθερά

$\omega_x dx + \omega_y dy = 0$

$a\omega_x + b\omega_y = 0 \rightarrow \dfrac{\omega_x}{\omega_y} = -\dfrac{b}{a}$

$\omega_x dx = -\omega_y dy$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{a}{b}$$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \rightsquigarrow \omega(x,y) = d$

$\downarrow$

η

Χρειάζεται να ελεγχθεί ότι $\dfrac{\partial(\omega, y)}{\partial(x,y)} \neq 0$

αν b μη-μηδενικό

$\xi = \omega(x,y)$

$\eta = x$

και $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{a}{b}$

και μπορούμε άρα ανάγουμε στην προηγούμενη περίπτωση

και στη συνέχεια όπως πριν

Παράδειγμα 4
σελίδα 413

$xy z_x - y^2 z_y - xz = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

$\frac{dx}{dy} = \frac{xy}{-y^2} = -\frac{x}{y}$

$\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{y}dy \rightsquigarrow \ln|x| = -\ln|y| \rightsquigarrow \ln|xy| = c$

$|xy| = d \rightsquigarrow |x|y = d$

για $xy = d$.

$\xi = xy$ $\quad z_x = z_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta \frac{\partial y}{\partial x} = z_\xi \cdot y + 0$.

$\eta = y$

$\quad z_y = z_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} = z_\xi \cdot x + z_\eta \cdot 1$

Επομένως $\cancel{xy \cdot y z_\xi - y^2 x z_\xi} - y^2 z_\eta - xz = 0$

$-y^2 z_\eta - xz = 0$

$-\eta^2 z_\eta - \frac{\xi}{\eta} z = 0 \rightsquigarrow \eta^3 z_\eta + \xi z = 0$.

$z(\xi,\eta) = f(\xi) e^{-\int_1^\eta \frac{\xi}{s^2} ds}$

$z(\xi,\eta) = f(\xi) e^{\frac{\xi}{2\eta^2} - \frac{\xi}{2}}$

$z(x,y) = f(xy) e^{\frac{xy}{2\eta^2} - \frac{xy}{2}}$

Παράδειγμα 6
σελίδα 415

Ίδια με το παρ. 4 μόνο που ζητάει να βρεθεί μια λύση η οποία $z(x,1) = x^2$.

$z(x,1) = x^2 \rightsquigarrow x^2 = f(x \cdot 1) e^{\frac{x}{2} - \frac{x}{2}} \rightsquigarrow f(x) = x^2$

και επομένως $z(x,y) = (xy)^2 e^{\frac{xy}{2\eta^2} - \frac{xy}{2}}$

Άσκηση 4i
σελίδα 416

$z_x - z_y = 1 \quad , \quad z(x,0) = \sin x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{1} \rightsquigarrow dx + dy = 0$

$x + y = d$

$\xi = x$

$\eta = x + y$

$z_x = z_\xi + z_\eta$

$z_y = z_\xi \cdot 0 + z_\eta$

$\rightsquigarrow z_\xi + z_\eta - z_\eta = 1 \rightsquigarrow z_\xi = 1$ η z σταθερή ως προς ξ.

άρα $z(\xi,\eta) = \xi + f(\eta)$.

$z(x,0) = \sin x$ | $\sin x = z(x,0) = x + f(x) \Rightarrow f(x) = \sin x - x$

$z(x,y) = x + f(x+y)$ | Άρα $z(x,y) = x + \sin(x+y) - (x+y)$

$z(x,y) = \sin(x+y) - y$

Επαλήθευση: $\left.\begin{aligned} z_x &= \cos(x+y) \\ z_y &= \cos(x+y) - 1 \end{aligned}\right\} z_x - z_y = 1$ ✓

Άσκηση 6
σελίδα 417

$\xi = \log x \qquad \Omega = \{(x,y) : x>0,\ y>0\}.$

$\eta = \log y$

(ii) $2x z_x + 3y z_y = \log x$

$z_x = z_\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{1}{x} z_\xi + 0 \rightsquigarrow x z_x = z_\xi$

$z_y = \ldots \Rightarrow y z_y = z_\eta$

Άρα $2 z_\xi + 3 z_\eta = \xi$

$\dfrac{d\xi}{d\eta} = \dfrac{2}{3} \rightsquigarrow 3d\xi - 2d\eta = 0$

$3\xi - 2\eta = d$

$a = \xi$

$b = 3\xi - 2\eta$

$$z(x,y) = f(3\log x - 2\log y) + \frac{(\log x)^2}{4}$$

Αν $z(x,1) = \sin x$, θα έπρεπε να προσδιορίσαμε την f

$$\sin x = f(3\log x) + \frac{(\log x)^2}{4}$$

$$\sin x - \frac{(\log x)^2}{4} = f(\underbrace{3\log x}_{u})$$

$u = 3\log x \;\downarrow\; e^{u/3}$ άρα $f(u) = \sin(e^{u/3}) - \frac{[\log(e^{u/3})]^2}{4} = \sin(e^{u/3}) - \frac{u^2}{36}$

$$z(x,y) = \sin e^{\frac{3\log x - 2\log y}{3}} - \frac{(3\log x - 2\log y)^2}{36} + \frac{(\log x)^2}{4}$$